جامعة البعث	امتحان مقرر المعادلات التفاضلية 1	الاسم:
كلية العلوم	لطلاب السنة الثانية رياضيات	الدرجة: (100)
قسم الرياضيات	الفصل الأول للعام الدراسي 2016 – 2017	المدة: ساعة ونصف

السؤال الأول(20 درجة):

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y' x^3 \sin y = xy' - 2y$$

السؤال الثاني(20 درجة):

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y + xy' = y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

السؤال الثالث(20 درجة):

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(e^x + y + \sin y\right)dx + \left(e^y + x + x\cos y\right)dy = 0$$

السؤال الرابع(20 درجة):

جد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x = \tan^{-1}(y') + \frac{y'}{1 + y'^2}$$

السؤال الخامس(20 درجة):

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية التالية:

$$y\,(y - 1)\,y'' + y'^2 = 0$$

حمص 29\1\2017 م مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح د. ميسون زين الدين

جواب السؤال الأول (20 درجة) :

$$y'x^3\sin y = xy' - 2y$$

الحل:

$$y'x^3\sin y - xy' = -2y \Rightarrow y'\left(x^3\sin y - x\right) = -2y \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{\left(x^3\sin y - x\right)} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\left(\frac{x^3\sin y - x}{2y}\right) \Rightarrow x' - \frac{1}{2y}x = -\frac{\sin y}{2y}x^3$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة برنولي بالدالة x والمتحول المستقل y ولحلها نقسم الطرفين على المقدار x^3 :

$$\frac{x'}{x^3} - \frac{1}{2y}\frac{1}{x^2} = -\frac{\sin y}{2y}$$

ولنجري التحويل:

$$z = \frac{1}{x^2} \Rightarrow z' = -2\frac{x'}{x^3} \Rightarrow \frac{x'}{x^3} = -\frac{1}{2}z'$$

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أنَّ:

$$-\frac{1}{2}z' - \frac{1}{2y}z = -\frac{\sin y}{2y} \Rightarrow z' + \frac{1}{y}z = \frac{\sin y}{y}$$

والمعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بالدالة z والمتحول المستقل y :

$$\mu = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln y} = y$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[y\,z\right]' = y\left(\frac{\sin y}{y}\right) = \sin y$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$y\,z = \int \sin y\,dy + c \Rightarrow y\,z = -\cos y + c$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد أنَّ:

$$y\frac{1}{x^2} = -\cos y + c \Rightarrow \boxed{y = x^2\left(c - \cos y\right)}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

جواب السؤال الثاني(20 درجة):

$$y + xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل:

$$xy' = -y + y\ln\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow y' = -\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ومن الواضح أنَّ المعادلة المعطاة متجانسة ولحلها نجري التحويل $\frac{y}{x}=z$ ومنه فإنَّ $y=xz \Rightarrow y'=xz'+z$ وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أنَّ:

$$xz'+z=-z+z\ln(z) \Rightarrow xz'=-2z+z\ln(z) \Rightarrow xz'=z\left[\ln(z)-2\right] \Rightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx}=z\left[\ln(z)-2\right] \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dz}{z\left[\ln(z)-2\right]} \Rightarrow \int\frac{dx}{x}=\int\frac{dz}{z\left[\ln(z)-2\right]} \Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{d\left[\ln(z)-2\right]}{\left[\ln(z)-2\right]} \Rightarrow \ln(x)+\ln c=\ln\left[\ln(z)-2\right] \Rightarrow$$

$$\ln(x)+\ln c=\ln\left[\ln(z)-2\right] \Rightarrow \ln(cx)=\ln\left[\ln(z)-2\right] \Rightarrow (cx)=\ln(z)-2$$

$$\ln(z)=cx+2 \Rightarrow z=e^{cx+2}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $z=\frac{y}{x}$ نجد أنَّ:

$$\frac{y}{x}=e^{cx+2} \Rightarrow \boxed{y=xe^{cx+2}}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

جواب السؤال الثالث (20 درجة):

$$\left(e^x+y+\sin y\right)dx+\left(e^y+x+x\cos y\right)dy=0$$

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=\left(e^x+y+\sin y\right) \quad , \quad Q(x,y)=\left(e^y+x+x\cos y\right)$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1+\cos y \quad , \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1+\cos y$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة تامة ، وبأخذ $x_0=0\,,\ y_0=0$ نجد أنَّ الحل العام للمعادلة المعطاة يكتب بالشكل:

$$F(x,y)=\int_0^x P(x,y)\,dx+\int_0^y Q(0,y)\,dy=\int_0^x\left(e^x+y+\sin y\right)dx+\int_0^y\left(e^y+0+(0)\cos y\right)dy$$

$$=\int_0^x\left(e^x+y+\sin y\right)dx+\int_0^y e^y\,dy=\left[e^x+xy+x\sin y\right]_{x=0}^{x=x}+\left[e^y\right]_{y=0}^{y=y}$$

$$=\left(e^x+xy+x\sin y-1\right)+\left(e^y-1\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{F(x,y)=e^x+e^y+xy+x\sin y-2=c}$$

جواب السؤال الرابع (20 درجة):

$$x = \tan^{-1}(y') + \frac{y'}{1+y'^2}$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$x = \arctan(y') + \frac{y'}{1+y'^2}$$

ولحلها نفرض أنَّ $y' = p$ ومنه فإنَّ:

$$\boxed{x = \arctan(p) + \frac{p}{1+p^2}} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

وبما أنَّ:

$$y' = p \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = p \;\Rightarrow\; dy = pdx \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

وبالاستفادة من العلاقة (1) والتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$dy = p\left[\frac{1}{1+p^2} + \frac{(1+p^2) - p(2p)}{(1+p^2)^2}\right]dp \;\Rightarrow\; dy = p\left[\frac{(1+p^2)+(1+p^2)-2p^2}{(1+p^2)^2}\right]dp$$

$$dy = p\left[\frac{2+2p^2-2p^2}{(1+p^2)^2}\right]dp \;\Rightarrow\; dy = p\left[\frac{2}{(1+p^2)^2}\right]dp \;\Rightarrow\; dy = \frac{2p\,dp}{(1+p^2)^2} \;\Rightarrow$$

$$dy = \frac{dp^2}{(1+p^2)^2} \;\Rightarrow\; \int dy = \int \frac{dp^2}{(1+p^2)^2} \;\Rightarrow\; \boxed{y = -\frac{1}{(1+p^2)} + c} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

من العلاقتين (1) و (2) يتضح أنَّ الحل وسيطياً للمعادلة المعطاة هو:

$$x = \arctan(p) + \frac{p}{1+p^2} \quad , \quad y = -\frac{1}{(1+p^2)} + c$$

جواب السؤال الخامس (20 درجة):

$$y(y-1)y'' + y'^2 = 0$$

الحل:

بوضع $y' = p$ نجد أنَّ:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = p\frac{dp}{dy}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أنَّ:

$$y(y-1)p\frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \;\Rightarrow\; y(y-1)p\frac{dp}{dy} = -p^2 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y(y-1)} = -\frac{p}{p^2}dp \;\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y(y-1)}=-\frac{dp}{p} \Rightarrow \int\frac{dy}{y(y-1)}=-\int\frac{dp}{p} \Rightarrow \int\frac{y-(y-1)}{y(y-1)}dy=-\int\frac{dp}{p} \Rightarrow$$

$$\int\frac{y}{y(y-1)}dy-\int\frac{(y-1)}{y(y-1)}dy=-\int\frac{dp}{p} \Rightarrow \int\frac{1}{(y-1)}dy-\int\frac{1}{y}dy=-\int\frac{dp}{p} \Rightarrow$$

$$\ln(y-1)-\ln(y)=-\ln p+\ln c \Rightarrow \ln(y-1)-\ln(y)=\ln\left(\frac{1}{p}\right)+\ln c \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{y-1}{y}\right)=\ln\left(\frac{c}{p}\right) \Rightarrow \frac{y-1}{y}=\frac{c}{p} \Rightarrow \boxed{p=\frac{cy}{y-1}}$$

وبما أنَّ:

$$y'=p=\frac{cy}{y-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{cy}{y-1} \Rightarrow \left(\frac{y-1}{y}\right)dy=cdx \Rightarrow \int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy=\int cdx \Rightarrow$$

$$\boxed{y-\ln y=cx+c_1}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

انتهت الأجوبة

أ.أحمد حاتم أبو حاتم

0947075489